

CHAPITRE 3

LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS APPLIQUEE AUX SOLS

- 3.1 Introduction
- 3.2 Notion de contrainte - Equations d'équilibre
- 3.3 Répartition des contraintes autour d'un point
- 3.4 Cercle de Mohr
- 3.5 Notion de déformation
- 3.6 Relation contraintes-déformations
- 3.7 Applications pour le calcul des contraintes dans les sols
- 3.8 Calcul des contraintes dues aux surcharges dans les sols
- 3.9 Notions de rhéologie des sols

3.1 Introduction

On assimile les sols comme étant des massifs semi-infinis ou finis à deux ou à trois dimensions, en pratique on considère toujours (sauf cas contraire) les massifs à deux dimensions. Ces massifs, assimilés à un milieu continu, peuvent être soumis à divers types de sollicitation (figure 1) :

- les forces massiques :
 - * pesanteur : W
 - * poussée d'écoulement d'eau : E_w
- les charges surfaciques :
 - * ponctuelles : P_i
 - * réparties : q_i

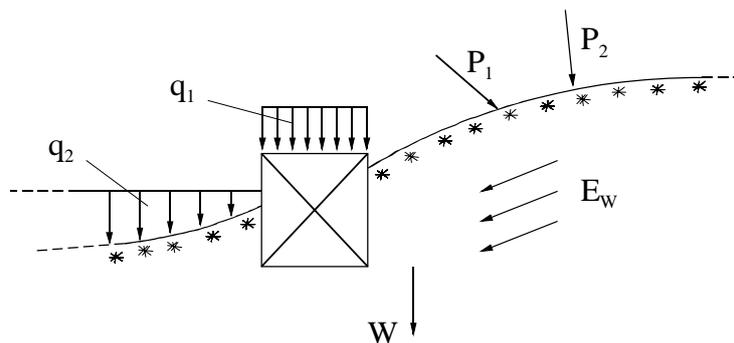


Figure 1. Types de sollicitation appliqués sur un massif de sol

L'étude du massif par la mécanique des sols consiste à déterminer sa réaction sous les sollicitations qui s'y exercent, et de vérifier si sa stabilité est assurée ou non. A cet effet on s'intéresse aux contraintes et aux déformations qui sont provoquées dans le sol sous l'action des sollicitations extérieures comme l'indique le schéma suivant :

Sollicitations extérieures \longrightarrow Contraintes \longrightarrow Déformations

On fait alors des hypothèses sur le comportement du sol qui se traduisent par des relations contraintes-déformations, on en distingue deux cas :

- lorsque les sollicitations sont faibles par rapport à la résistance du sol, les déformations sont faibles, elles sont donc proportionnelles aux forces appliquées, on utilise dans ce cas la théorie d'élasticité linéaire ;
- lorsque les sollicitations sont très importantes, elles engendrent des déformations jusqu'à provoquer la rupture du sol, on applique dans ce cas la théorie de la plasticité.

3.2 Notion de contrainte - Equations d'équilibre

3.2.1 Notion de contrainte

Pour un matériau, c'est une notion fictive analogue à celle de la tension d'un fil. Un fil souple tendu et rectiligne est en équilibre sous l'action de deux forces extérieures égales appliquées à ses extrémités. En coupant ce fil par un plan (A) en deux parties (I) et (II), sur la surface de coupure δS (très petite assimilée à un point) la partie (II) exerce une force sur la partie (I). Cette force est par définition la tension du fil dont la direction est celle du fil (figure 2).

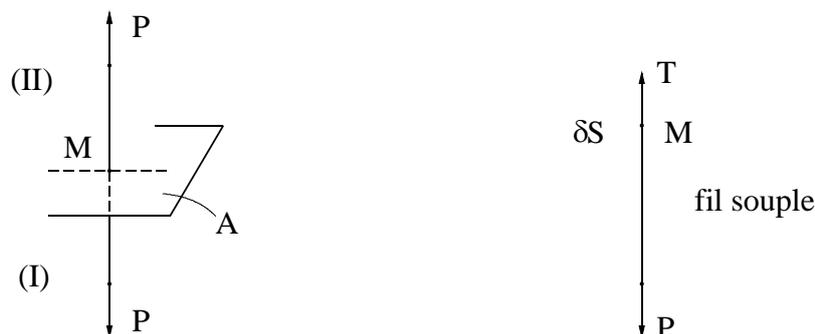


Figure 2. Tension dans un fil

De la même manière, soit un solide quelconque à la surface duquel s'exercent des forces. En coupant ce solide par un plan fictif (A), sur la surface de coupure S la partie (II) exerce des forces sur la partie (I).

Soit un point M d'une portion de surface δS entourant le point M sur S. Sur δS la force exercée par la partie (II) est δP dont la direction n'est pas connue a priori (figure 3). On appelle contrainte au point M sur la facette δS le vecteur:

$$p = \frac{\delta P}{\delta S}$$

La contrainte est une fonction du point M considéré et de la facette passant par ce point. La contrainte p se décompose en une contrainte normale σ suivant la normale MN à la facette, et en une contrainte de cisaillement τ suivant le plan de la facette.

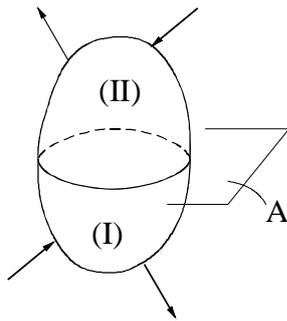


Figure 3a. Contrainte dans un solide

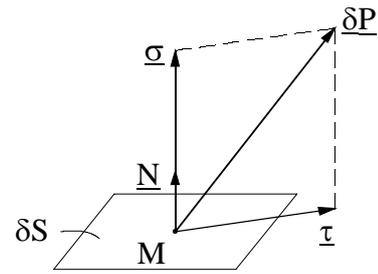
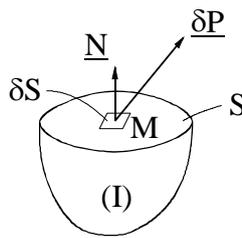


Figure 3b. Décomposition d'une contrainte

Pour déterminer les contraintes qui s'exercent sur toutes les différentes facettes autour d'un point M, on montre qu'il suffit de connaître en ce point les six valeurs suivantes :

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{zx} = \tau_{xz}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (1)$$

c.à.d. les composantes des contraintes qui s'exercent sur les faces d'un cube centré au point M, et dont les arêtes sont parallèles aux axes Ox, Oy et Oz (figure 4). Ces valeurs représentent les termes du tenseur de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ qui s'écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

σ_{ij} est la composante appliquée sur la facette perpendiculaire à l'axe (i) parallèlement à l'axe (j).

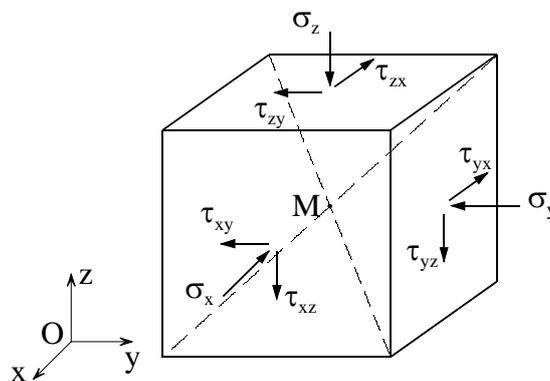


Figure 4. Etat de contrainte autour d'un point

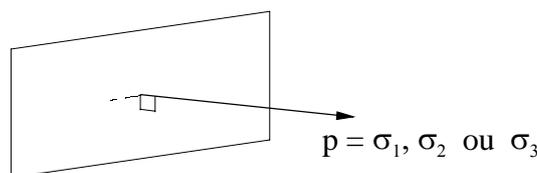


Figure 5. Plan principal et contrainte principale

Sur une facette dont le vecteur normal unitaire a pour composantes (a, b, c), la contrainte p a pour composantes :

$$p_x = a.\sigma_x + b.\tau_{xy} + c.\tau_{xz}$$

$$p_y = a.\tau_{yx} + b.\sigma_y + c.\tau_{yz}$$

$$p_z = a.\tau_{zx} + b.\tau_{zy} + c.\sigma_z$$

En tout point il existe trois plans privilégiés pour lesquels la contrainte est uniquement normale ($\tau = 0$), ils sont appelés plans principaux. Leurs directions normales sont les directions principales qui sont perpendiculaires deux à deux (figure 5); et les contraintes correspondantes notées: σ_1 , σ_2 , σ_3 sont dites principales.

3.2.2 Les équations d'équilibre

L'état de contrainte caractérisé par les six quantités précédemment introduites : σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} , est variable d'un point à l'autre. Soit un milieu bidimensionnel où on considère un carré élémentaire, dont les côtés sont parallèles aux axes Ox et Oy, et ont pour dimensions dx et dy (figure 6). Sur chaque côté s'exercent des contraintes et des forces, calculons les pour le côté de milieu M1 de coordonnées $(x + \frac{dx}{2}, y)$.

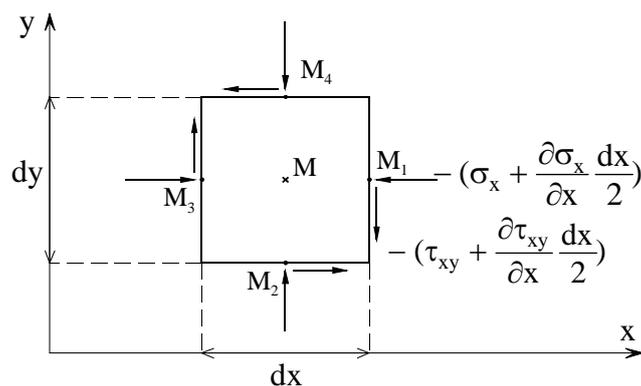


Figure 6. Etat de contrainte dans un carré élémentaire

Les contraintes qui s'exercent en M sont : σ_x , σ_y et τ_{xy} , celles qui s'exercent en M1 sont :

$$\sigma = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

$$\tau = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2}$$

Ainsi la force s'exerçant sur le côté de milieu M1 a pour composantes suivant Ox et Oy :

$$(M_1) \begin{cases} - \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \\ - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \end{cases}$$

De la même façon, on détermine les forces s'exerçant sur les côtés de milieux M_2 , M_3 , et M_4 , elles ont pour composantes :

$$(M_2) \begin{cases} \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \\ \left(\sigma_y - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \end{cases}$$

$$(M_3) \begin{cases} \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \\ \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy \end{cases}$$

$$(M_4) \begin{cases} - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \\ - \left(\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx \end{cases}$$

Sur la partie du solide délimitée par le carré peuvent aussi s'exercer des forces de volume (la pesanteur par exemple), on suppose que par unité de surface ces forces ont pour composantes en $M : (X(x,y), Y(x,y))$. Toutes les forces appliquées à l'élément de solide ont une résultante nulle, on obtient suivant Ox :

$$- \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + \left(\tau_{xy} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx - \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dx + \left(\sigma_x - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dy + X dx dy = 0$$

en divisant par $(dx dy)$, on obtient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = X \quad (1)$$

suivant Oy , on obtient de la même manière l'équation :

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = Y \quad (2)$$

Les équations (1) et (2) régissent l'équilibre d'un corps solide dans le cas bidimensionnel. Dans le cas du milieu à trois dimensions, les équations d'équilibre s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= X \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= Y \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= Z \end{aligned}$$

Si les forces de volume se réduisent uniquement à la force de pesanteur en prenant l'axe vertical ascendant, on a donc : $X = Y = 0$, $Z = -\gamma$

3.3 Répartition des contraintes autour d'un point

Convention de signe: Comme les sols résistent très peu à la traction, cette résistance est négligée. On convient alors de compter positivement les contraintes de compression en mécanique des sols (en mécanique des milieux continus on utilise la convention opposée: la traction est comptée positive, la compression est comptée négative).

Soit AA' une facette orientée autour d'un point M, elle est définie par la normale MN orientée vers l'intérieur du solide telle que (figure 7a) : $(\widehat{MX_n}, \widehat{MX_t}) = -\frac{\pi}{2}$.

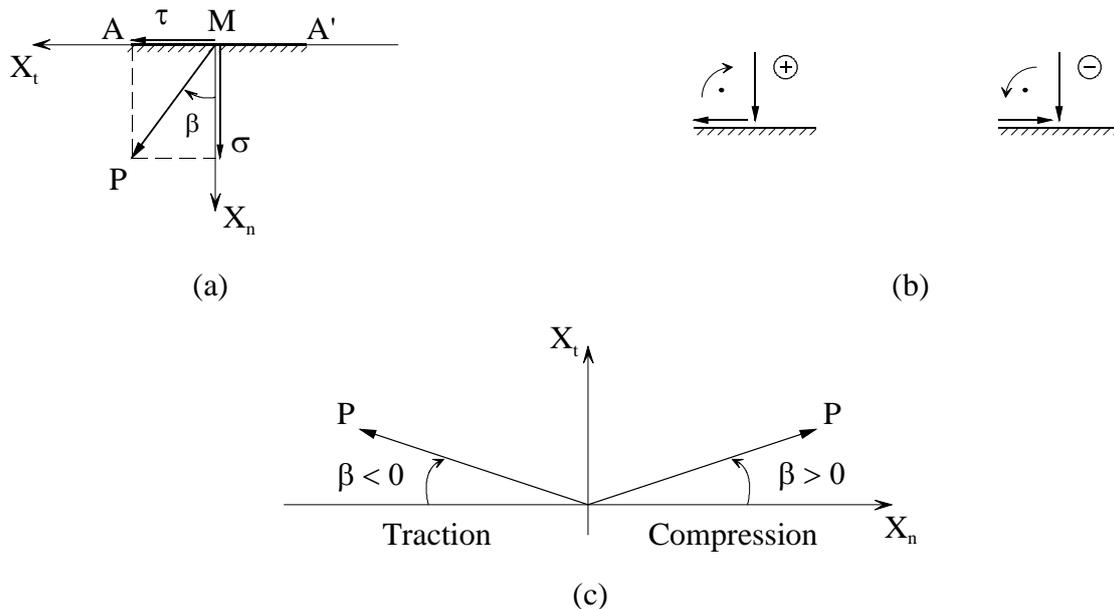


Figure 7. Définition d'une facette et convention de signe

On travaille dans le plan (X_n, X_t)

en compression $\sigma > 0$	en traction $\sigma < 0$
$\tau > 0$ si $\beta > 0$	$\tau > 0$ si $\beta < 0$
$\tau < 0$ si $\beta < 0$	$\tau < 0$ si $\beta > 0$

Considérons un solide bidimensionnel soumis à l'action de forces extérieures. La détermination des efforts intérieurs en un point M du solide peut être faite en isolant un prisme autour de M délimité par (figure 8) :

- Deux facettes principales :

(D_p^1) : la direction principale maximale où agit la contrainte principale maximale σ_1 ,

(D_p^3) : la direction principale minimale où agit la contrainte principale minimale σ_3 ,

avec : $\sigma_1 > \sigma_3$

- Une facette AA' de longueur dS, orientée d'un angle α par rapport à la direction (D_p^1) .

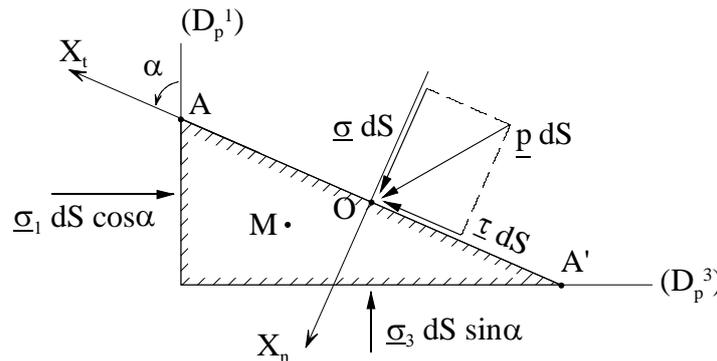


Figure 8. Etat de contrainte autour d'un point

On se propose d'étudier l'état de contrainte sur la facette AA' lorsque celle-ci tourne autour du point M. L'équilibre du prisme, par projection sur les axes (X_t) et (X_n) des forces appliquées amène au système suivant, $\forall dS$:

$$\begin{cases} \tau = (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \frac{\sin 2\alpha}{2} \\ \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + (\sigma_1 - \sigma_3) \cdot \frac{\cos 2\alpha}{2} \end{cases} \quad (3)$$

On désigne:

La contrainte normale moyenne par : $\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}$

Le déviateur des contraintes par : $\tau_m = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$

La courbe définie dans le plan $(O\sigma, O\tau)$ par le système (3) est un cercle dont l'équation est:

$$(\sigma - \sigma_m)^2 + \tau^2 = \tau_m^2$$

Ce cercle a pour centre le point O' de coordonnées $(\sigma_m, 0)$, et son rayon est égal à τ_m , c'est le cercle de Mohr.

3.4 Cercle de Mohr

3.4.1 Propriétés

Théorème 1 :

Lorsque la facette AA' tourne autour de M selon un axe de rotation orienté σ_2 ($\sigma_3 < \sigma_2 < \sigma_1$) le point figuratif J(σ, τ) des contraintes décrit un cercle appelé cercle de Mohr, dont l'axe est celui des contraintes normales.

Théorème 2 :

Lorsque le plan de la facette AA', passant par une direction principale, tourne d'un angle α autour de cette direction le point représentatif du vecteur contrainte sur le cercle de Mohr tourne d'un angle 2α .

En effet, en écrivant le système (3) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} \frac{(\sigma - \sigma_m)}{\tau_m} = \cos 2\alpha \\ \frac{\tau}{\tau_m} = \sin 2\alpha \end{cases}$$

On vérifie facilement ce résultat à partir de la figure 9.

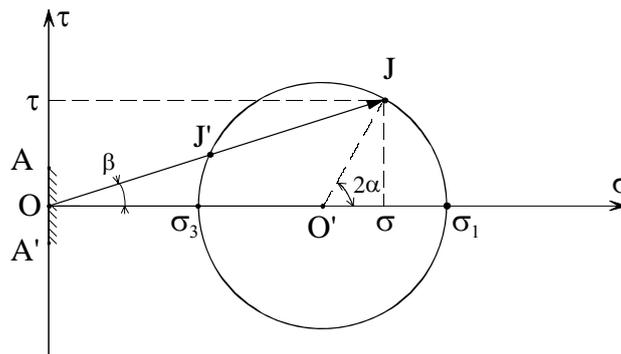


Figure 9. Représentation du cercle de Mohr et du vecteur contrainte

Application: D'après la figure 8, la facette sur laquelle s'applique le vecteur OJ fait un angle α par rapport à (D_p^1) (figure 7).

Théorème 3 :

Si on porte la facette AA' sur l'axe $(O\tau)$, OJ représente la contrainte sur AA' qui fait un angle $\beta = (\widehat{O\sigma}, O\tau)$ par rapport à la normale de AA'.

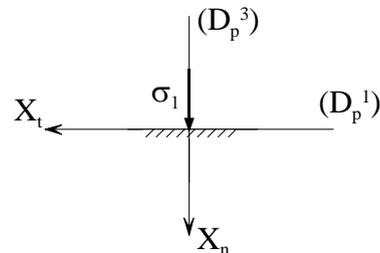
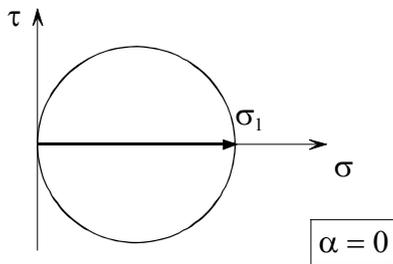
Remarque importante :

Il ne suffit pas de connaître l'inclinaison orientée d'une contrainte pour la déterminer et la facette sur laquelle elle agit, il faut en plus connaître l'angle que fait la facette par rapport à un plan repéré sur le cercle de Mohr. Par exemple, la contrainte est définie par le vecteur OJ' (figure 9) si l'angle que fait la facette AA' avec (D_p^1) est:

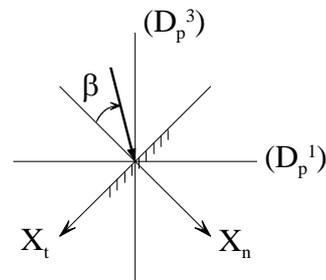
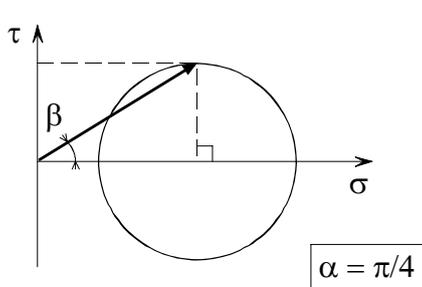
$$\alpha = \frac{(\mathbf{O}'\sigma, \mathbf{O}'J')}{2}$$

3.4.2 Etats de contrainte particuliers

* Contrainte principale σ_1



* Valeur maximale de τ



$$\alpha = \frac{\pi}{4}$$

Il existe d'autres états de contrainte particuliers tel que celui de la contrainte principale σ_3 .

3.4.3 Méthode du pôle

Elle se base sur la propriété suivante: soient deux plans quelconques (P_X) et (P_Y) passant par la direction principale (D_p^2) au point M, les points J_X et J_Y représentatifs des contraintes s'exerçant sur les plans (ou facettes) (P_X) et (P_Y) sont situés sur le cercle de Mohr et l'angle (P_0J_X, P_0J_Y) a la même mesure que l'angle fait entre les directions des plans (P_X) et (P_Y) .

Détermination du pôle (figure 10):

Du point J_X on mène la parallèle à la trace du plan (P_X) , cette droite recoupe le cercle en un point P_0 appelé pôle. Pour déterminer la contrainte s'exerçant sur le plan (P_Y) , il suffit de mener à partir du pôle P_0 la parallèle à la trace du plan (P_Y) ; l'intersection, autre que le point P_0 , de cette droite avec le cercle de Mohr donne J_Y qui est le point représentatif de la contrainte s'exerçant sur (P_Y) .

Remarque: On peut déterminer inversement les directions des plans sur lesquels agissent leurs états de contrainte respectifs en joignant le pôle aux points représentatifs des contraintes sur le cercle, c'est le cas pour les directions principales (D_p^1) et (D_p^3) déterminées sur la (figure 10).

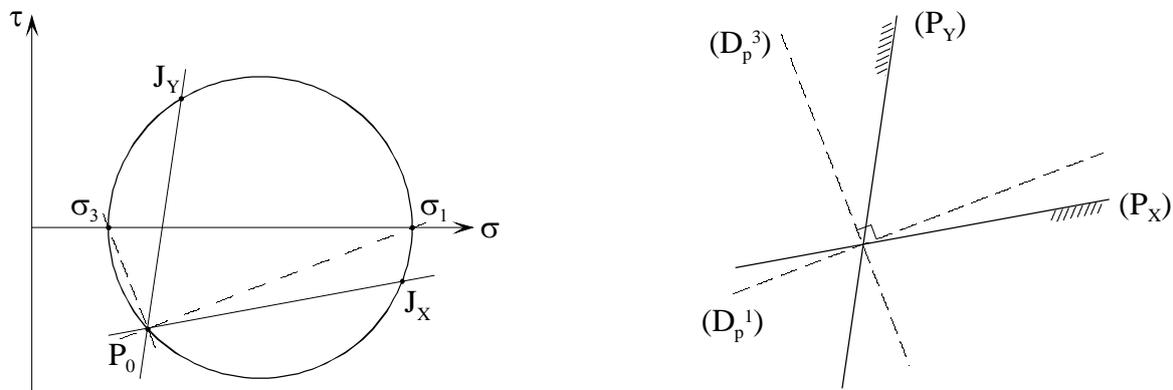


Figure 10. Détermination de l'état de contrainte par la méthode du pôle

Vérification de la méthode du pôle

Soient J_X et J_Y les points représentatifs sur le cercle de Mohr des contraintes OJ_X et OJ_Y agissant respectivement sur les plans (P_X) et (P_Y) , faisant entre eux un angle α . D'après le théorème 2, l'angle $(O'J_X, O'J_Y)$ est égal à 2α (figure 11). Soit P_0 le point obtenu sur le cercle par la méthode décrite ci-dessus, et posons : $\beta = (P_0J_X, P_0J_Y)$.

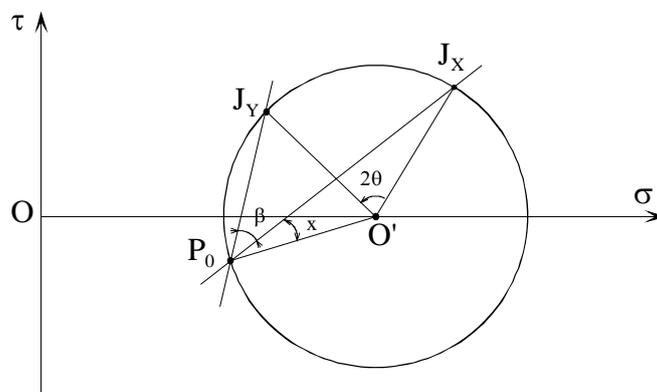


Figure 11. Vérification de la méthode du pôle

En considérant d'une part le triangle isocèle $O'J_XP_0$, on a : $2x + 2\alpha + \theta = \pi$,
et d'autre part le triangle isocèle $O'J_YP_0$, on a : $2(\beta + x) + \theta = \pi$ d'où $\beta = \alpha$,
on conclut alors que le point P_0 est le pôle en question; en effet l'angle β séparant les directions (P_0J_X) et (P_0J_Y) est l'angle α situé entre les directions sur lesquelles agissent les contraintes OJ_X et OJ_Y .

Exemple d'application: Cas d'une barre bidimensionnelle en traction simple

Soit une barre bidimensionnelle soumise sur ses bases à une traction uniforme σ_1 . Sur ses bords latéraux ne s'exerce aucune contrainte ($\sigma_3 = 0$). L'état de contrainte dans la barre est homogène: c à d. qu'en tout point M la contrainte s'exerçant sur un plan horizontal y est normale et a pour valeur σ_1 ; tandis que sur un plan vertical les contraintes sont nulles. Cet état est représenté par le cercle de traction simple (figure 12).

Cherchons la contrainte qui s'exerce sur le plan (P_X) faisant l'angle θ avec l'horizontale.

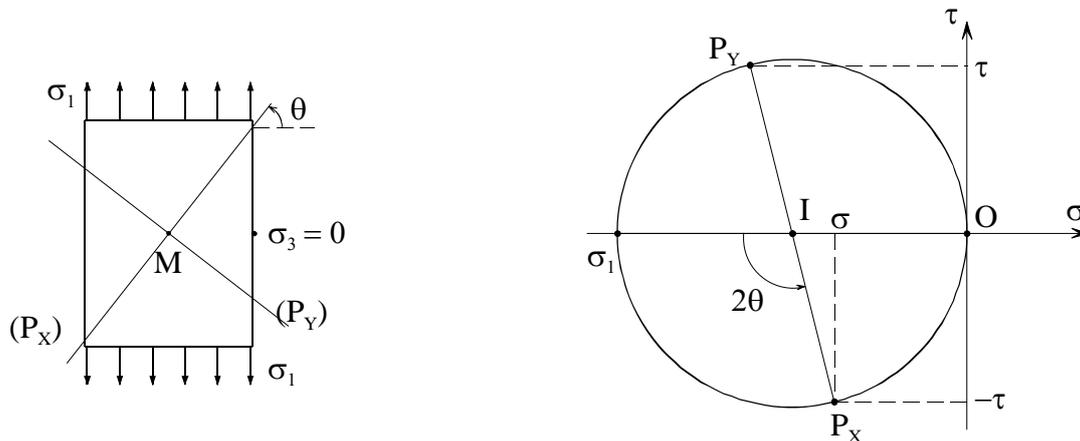


Figure 12. Etat de contrainte dans une barre soumise à une traction simple

Le point représentatif sur le cercle est le point P_X tel que : $\Theta(\sigma_1 I P_X) = 2\theta$, d'où on a :

$$\sigma = -\sigma_1 \frac{(1 + \cos 2\theta)}{2} \qquad \tau = -\sigma_1 \frac{\sin 2\theta}{2}$$

La contrainte qui s'exerce sur le plan (P_Y) perpendiculaire à (P_X) correspond au point représentatif P_Y diamétralement opposé au point P_X sur le cercle. La contrainte de cisaillement sur le plan (P_Y) est l'opposée de celle qui s'exerce sur le plan (P_X). D'où la propriété suivante :

Sur deux plans perpendiculaires les contraintes de cisaillement qui s'y exercent sont égales et de signes opposés. On peut vérifier cette propriété pour les états de contrainte représentés sur les figures 4 et 6.

3.5 Notion de déformation

Un solide soumis à l'action de forces se déforme. On se propose de définir l'état de déformation autour d'un point M. Soit un solide (S) que nous étudions avant et après déformation. Soit l'élément linéaire MN choisi autour de M; après déformation cet élément se transforme en M'N' (figure 13). Par rapport au repère Oxyz les coordonnées de ces points sont les suivantes :

$$M(x, y, z)$$

$$M'(x + w_x, y + w_y, z + w_z)$$

$$N(x + dx, y + dy, z + dz)$$

$$N'(x + dx + w_x, y + dy + w_y, z + dz + w_z)$$

où w_x , w_y et w_z sont les composantes du déplacement du point M.

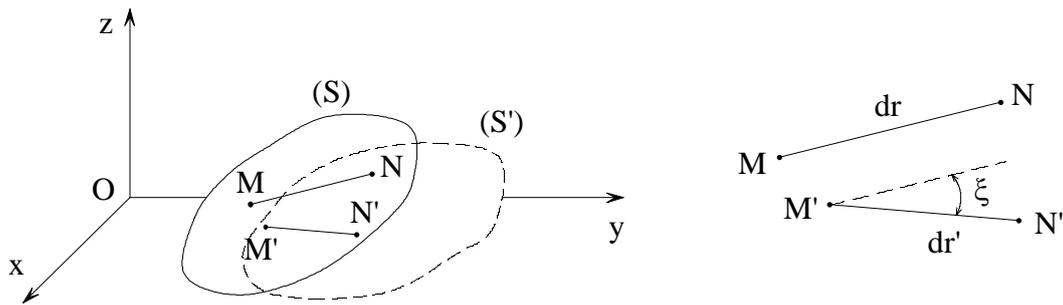


Figure 13. Déformation d'un solide (S)

En première approximation on écrit :

$$dw_x = \frac{\partial w_x}{\partial x} dx + \frac{\partial w_x}{\partial y} dy + \frac{\partial w_x}{\partial z} dz$$

$$dw_y = \frac{\partial w_y}{\partial x} dx + \frac{\partial w_y}{\partial y} dy + \frac{\partial w_y}{\partial z} dz$$

$$dw_z = \frac{\partial w_z}{\partial x} dx + \frac{\partial w_z}{\partial y} dy + \frac{\partial w_z}{\partial z} dz$$

On n'étudie que les petites déformations. Pour l'élément MN elles sont de deux types:

- une déformation linéaire ε qui est la variation de sa longueur, on a:

$$MN = dr \quad M'N' = dr' \quad \text{d'où : } \varepsilon = \frac{dr' - dr}{dr}$$

-une déformation angulaire (ou distorsion) qui est le changement de direction de MN, elle est définie à partir de l'angle :

$$\xi = (\widehat{MN, M'N'})$$

Pour déterminer les déformations autour d'un point, il suffit de connaître les six valeurs suivantes qui sont les composantes du tenseur de déformation $\underline{\underline{\varepsilon}}$:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \xi_{xy} = \xi_{yx}, \xi_{zx} = \xi_{xz}, \xi_{yz} = \xi_{zy}$$

On montre que ces quantités s'expriment en fonction des déplacements w_x , w_y et w_z , on a:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial w_x}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial w_y}{\partial y}, \varepsilon_z = \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

$$\xi_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial y} + \frac{\partial w_y}{\partial x} \right), \xi_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right), \xi_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_y}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial y} \right)$$

La variation de volume d'un petit élément autour du point M est :

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Comme pour les contraintes, il existe en tout point trois directions privilégiées pour lesquelles les déformations angulaires sont nulles ($\xi = 0$), ces directions sont appelées directions principales de déformation, elles coïncident avec les directions des contraintes principales. Les déformations principales sont notées : $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$.

3.6 Relations contraintes-déformations

La théorie des milieux continus montre que pour déterminer l'état de contrainte et de déformation dans un solide soumis à l'action de forces extérieures, il est nécessaire d'avoir des relations supplémentaires entre les contraintes et les déformations qui traduisent le comportement du matériau, c à d sa réponse lors d'un chargement; ces relations s'appellent lois de comportement.

On présente trois lois de comportement élémentaires (figure 14) qui peuvent schématiser certains aspects relatifs au comportement des sols. Ces lois sont représentées dans le cas d'un chargement à un seul paramètre (cas uni axial ou unidimensionnel).

3.6.1 Application de l'élasticité

L'élasticité linéaire et isotrope dans un solide se traduit par la linéarité et la réversibilité des déformations, elle s'exprime par la loi de Hooke qui se traduit par les deux équations:

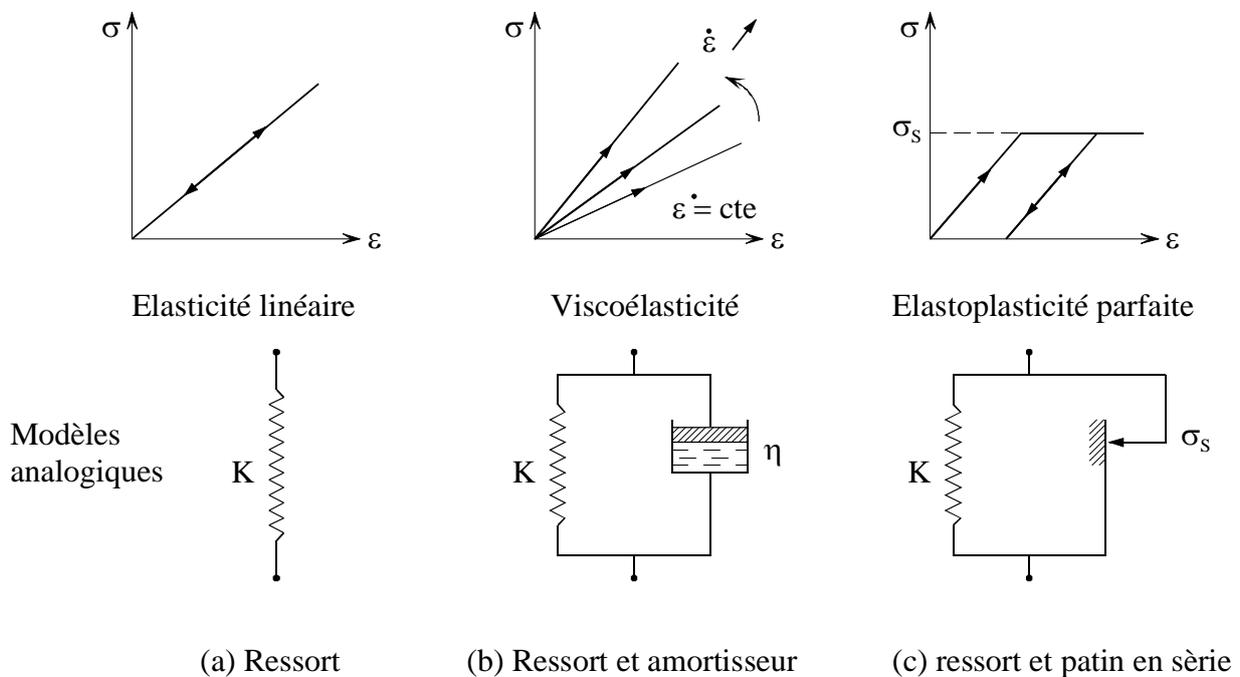


Figure 14. Exemples de lois de comportement schématisées dans le cas d'une sollicitation unidimensionnelle

$$\sigma_{\text{oct}} = K \cdot \varepsilon_{\text{oct}} \quad \text{où } K = \frac{E}{3(1-\nu)} \text{ est le module de compressibilité,}$$

$$\tau_{\text{oct}} = G \cdot \xi_{\text{oct}} \quad \text{où } G = \frac{E}{2(1+\nu)} \text{ est le module de cisaillement,}$$

E et ν sont respectivement le module de Young et le coefficient de Poisson, σ_{oct} et τ_{oct} sont les composantes octaédriques de l'état de contrainte définies par :

- la contrainte normale octaédrique, ou contrainte moyenne (ou sphérique) :

$$\sigma_{\text{oct}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

- la contrainte de cisaillement octaédrique ou contrainte déviatorique :

$$\tau_{\text{oct}} = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}{3} \right]^{1/2}$$

ε_{oct} et ξ_{oct} sont de même les composantes octaédriques de l'état de déformation définies, comme pour le tenseur de contrainte, par :

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3}$$

$$\xi_{\text{oct}} = \left[\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}{3} \right]^{1/2}$$

Remarque :

Les déformations volumiques sont disjointes des déformations de distorsion, ces dernières ne sont dues qu'aux contraintes de cisaillement.

Les six relations entre les contraintes et les déformations sont:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)}{E} \\ \varepsilon_z &= \frac{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} \\ \xi_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \\ \xi_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \\ \xi_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \end{aligned} \quad (4)$$

3.6.2 Viscosité - Viscoélasticité

Pour un fluide le comportement visqueux se traduit par la relation :

$$\tau = \eta \cdot \dot{\xi} \quad (5)$$

où:

η est le coefficient de viscosité,

τ est la contrainte de cisaillement,

$\dot{\xi}$ est la vitesse de distorsion.

Le modèle correspondant est l'amortisseur à huile ou dashpot.

Pour les solides la viscosité est couplée avec un autre comportement tel que l'élasticité, dans ce cas on a le modèle viscoélastique (ressort en parallèle avec l'amortisseur). Sur la courbe contrainte-déformation, à vitesse de déformation constante ($\dot{\epsilon} = \text{cte}$), la contrainte augmente avec la distorsion. Lorsque la contrainte σ est appliquée rapidement puis elle est maintenue constante, la déformation augmente dans le temps, dans ce cas le matériau présente le fluage.

3.6.3 Introduction à la plasticité

Le comportement plastique d'un solide est caractérisé par l'apparition de déformations permanentes sans fissuration. Ce comportement peut être schématisé par un patin dans le cas de la plasticité parfaite (figure 14c). Les déformations permanentes n'apparaissent qu'au delà d'un certain seuil en dessous duquel les déformations restent élastiques. La frontière du domaine élastique est définie par un critère de plasticité qui est généralement fonction des contraintes principales et de paramètres d'écrouissage A_i , il s'écrit sous la forme :

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) < 0$$

Dans le diagramme de Mohr il est possible de représenter ce critère par une courbe intrinsèque, qui sépare la zone des contraintes possibles de la zone des contraintes impossibles (figure 15). Cette notion de courbe intrinsèque sera bien développée dans le chapitre résistance au cisaillement des sols.

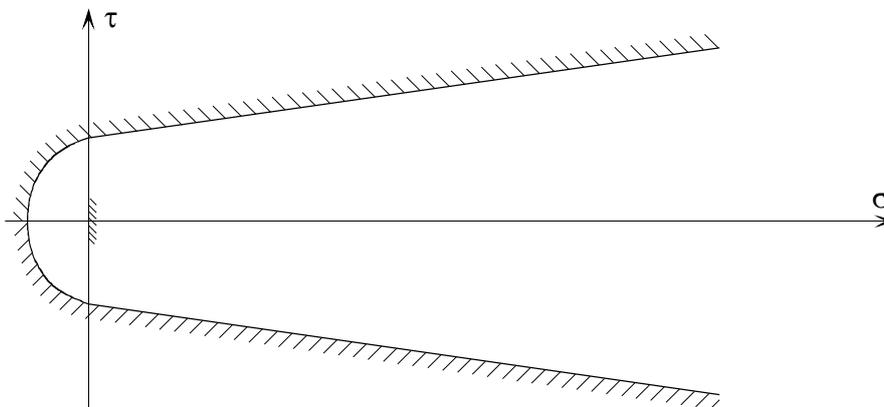


Figure 15. Courbe intrinsèque d'un sol

3.7 Applications pour le calcul des contraintes dans les sols

3.7.1 Contraintes dans le sol

Soit un sol saturé, les contraintes qui y sont appliquées sont réparties entre le squelette solide et l'eau.

- Dans un liquide (pour notre cas c'est l'eau) les contraintes qui existent sont les pressions c à d. des contraintes qui s'exercent suivant la normale de toute facette, elles n'admettent pas une composante de cisaillement, donc: $\tau = 0$. En un point, la pression est constante et est positive quelque soit la facette considérée. Dans un sol, cette contrainte due à l'eau, notée u , s'appelle la pression interstitielle.

- Dans le squelette solide sur toute facette s'exerce une contrainte normale notée σ' , et une contrainte de cisaillement notée τ' , appelées contraintes effectives. On note que ces contraintes ne peuvent être définies que si l'aire de la facette considérée est suffisamment grande par rapport aux dimensions des grains.

Donc si les contraintes totales qui s'exercent sur l'ensemble des deux phases (squelette solide et eau) sur une facette sont σ et τ , on a la relation importante de Terzaghi:

$$\sigma = \sigma' + u$$

$$\tau = \tau'$$

3.7.2 Calcul des contraintes dues à la pesanteur à partir des équations d'équilibre

3.7.2.1 sol indéfini à surface horizontale

Soit un massif de sol indéfini à surface horizontale soumis uniquement à l'action de la pesanteur, son poids spécifique total est γ , (figure 16a). Déterminons l'état de contrainte en un point M du massif.

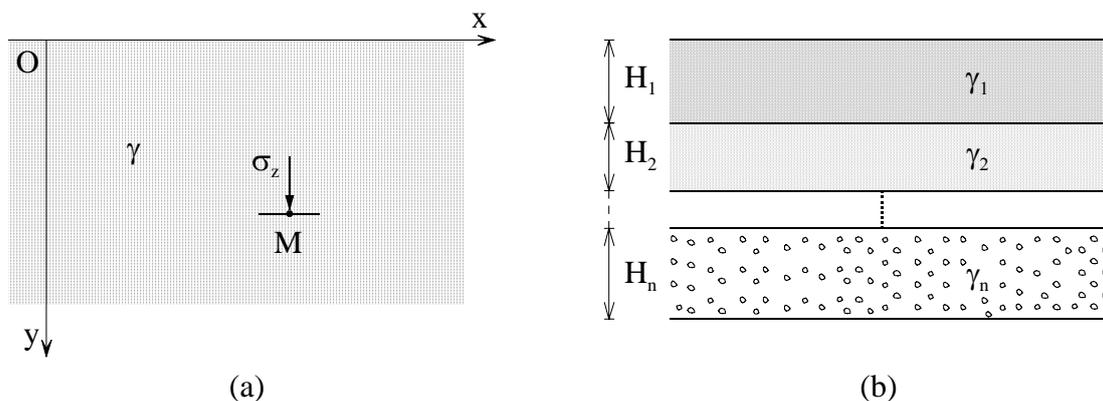


Figure 16. Sol indéfini à surface horizontale.

D'après la symétrie du problème les contraintes σ_x et σ_z sont principales, en effet $\tau_{zx} = 0$; les équations d'équilibre sont :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma$$

D'où on obtient :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= f(z) \\ \sigma_z &= \gamma \cdot z\end{aligned}$$

Dans le cas d'un massif avec plusieurs couches (figure 16b), on a:

$$\sigma_z = \sum \gamma_i \cdot H_i$$

Cependant la détermination de la contrainte σ_x nécessite la connaissance de la loi de comportement du sol. Par exemple si le sol est élastique linéaire, et en tout point du massif la déformation latérale ϵ_x est nulle, d'après les relations (4) on obtient :

$$\sigma_x = -\nu \cdot \sigma_z$$

Exemple de calcul des contraintes effectives

Soit un sol indéfini à surface horizontale submergé, l'eau étant à la hauteur H au dessus du sol (figure 17).

A la profondeur z, la contrainte verticale totale a pour valeur :

$$\sigma_z = \gamma_w \cdot H + \gamma \cdot z$$

La pression de l'eau est :

$$u = \gamma_w \cdot (H + z)$$

Donc la contrainte effective est :

$$\sigma'_z = \sigma_z - u = (\gamma - \gamma_w) \cdot z = \gamma' \cdot z$$

Le calcul d'une contrainte effective doit toujours s'effectuer par différence entre la contrainte totale et la pression interstitielle :

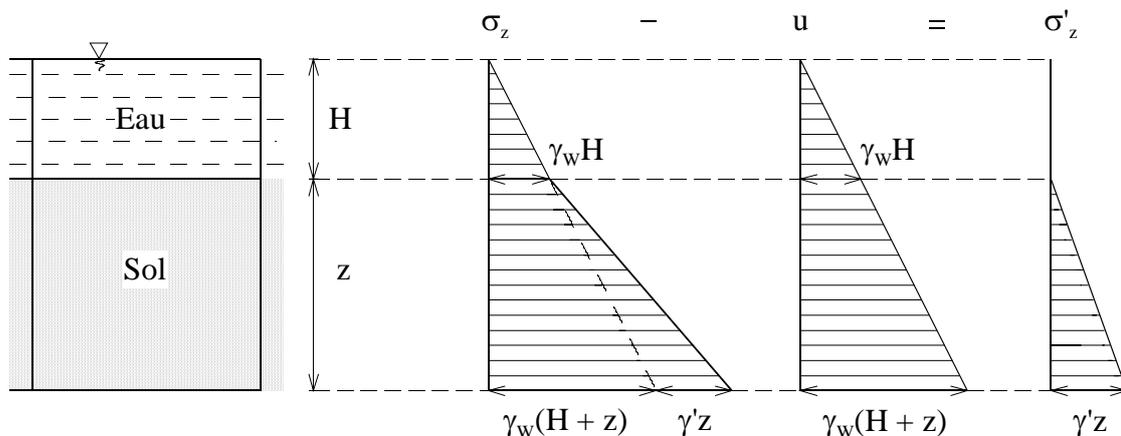


Figure 17. Calcul de la contrainte effective

3.7.2.2 Sol indéfini à surface inclinée

Soit un sol indéfini, de poids spécifique γ dont la surface plane fait un angle α avec l'horizontale; cherchons la contrainte qui s'exerce sur une facette parallèle à la surface inclinée (figure 18). Dans ce cas les équations d'équilibre s'écrivent:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\gamma \cdot \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = \gamma \cdot \cos \alpha$$

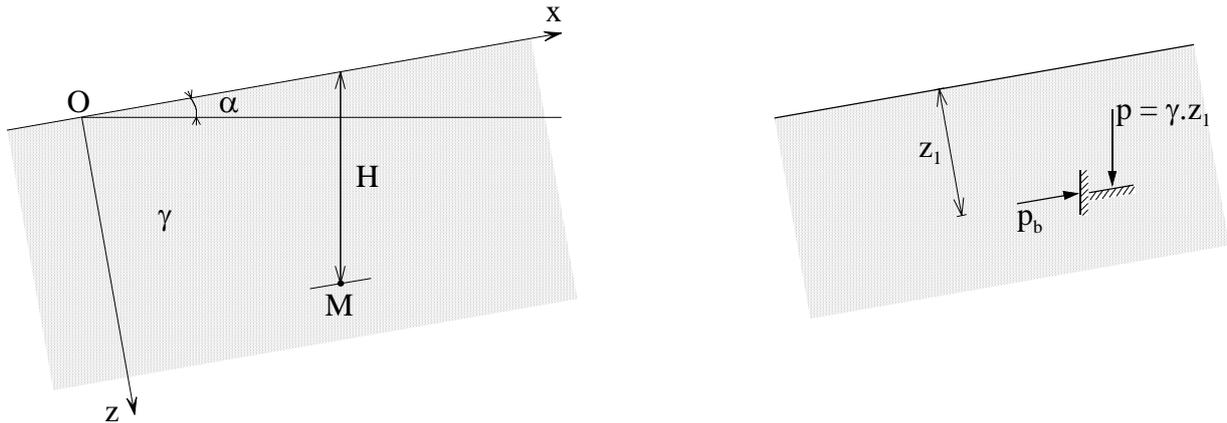


Figure 18. Massif de sol à surface inclinée

Pour ce problème, l'état de contrainte en un point c à d. : σ_x , σ_z , et τ_{xz} , est indépendant de x , donc on écrit :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0$$

L'intégration des équations d'équilibre donne alors:

$$\sigma_z = \gamma \cdot z_1 \cdot \cos \alpha$$

$$\tau_{xz} = -\gamma \cdot z_1 \sin \alpha$$

Mais pour déterminer σ_x , il faut connaître la loi de comportement du sol. La contrainte recherchée est verticale, sa valeur est :

$$p = \gamma \cdot z_1 = \gamma \cdot H \cdot \cos \alpha$$

On se propose de déterminer la contrainte s'exerçant sur une facette verticale, en supposant que σ_x est connue par la loi de comportement du sol.

Soit J le point représentatif de la contrainte $p = \gamma \cdot z_1$, agissant sur la facette parallèle à la surface inclinée, qui appartient au cercle de Mohr donnant l'état de contrainte au point M. On peut déterminer alors le point représentatif J' de la contrainte s'exerçant sur une facette perpendiculaire à la facette où s'exerce la contrainte p; sur cette facette la contrainte normale

vaut σ_x et la contrainte de cisaillement vaut $(-\tau_{zx})$ (voir § 3.4.3), on trace alors le cercle de Mohr de centre O' tel que : $O'J = O'J'$.

Pour déterminer la contrainte s'exerçant sur une facette verticale on utilise la méthode du pôle. Du point J on mène la parallèle à la surface inclinée qui coupe le cercle au point P_0 qui est le pôle, à partir de P_0 on mène la verticale (la parallèle à la facette verticale), l'intersection avec le cercle donne le point J_1 , qui donne la contrainte $p_b = OJ_1$ s'exerçant sur la facette verticale au point M (figure 19).

Remarque :

La contrainte p est parallèle à la facette verticale où s'exerce la contrainte p_b , en plus la contrainte p_b est parallèle à la facette parallèle à la surface inclinée où s'exerce la contrainte p . Dans ce cas on dit que les contraintes p et p_b sont conjuguées, comme chacune de ces contraintes est parallèle à la facette sur laquelle s'exerce l'autre contrainte.

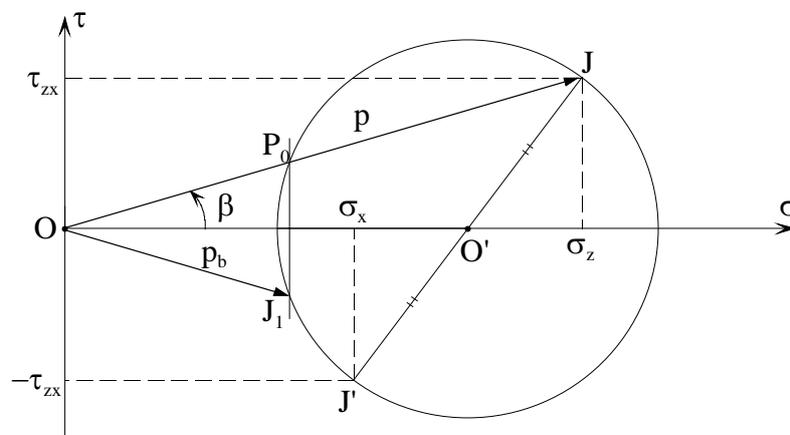


Figure 19. Etat de contrainte dans un massif de sol à surface inclinée

3.8 Calcul des contraintes dues aux surcharges dans les sols

Nota: Les résultats présentés dans ce paragraphe serviront notamment pour le calcul du tassement d'une couche compressible, sous l'action d'une surcharge appliquée sur le sol.

3.8.1 Cas d'un sol à surface uniformément chargée

Soit un sol de poids spécifique γ , à surface horizontale uniformément chargée par une pression p (figure 1). La contrainte verticale à une profondeur z est principale, son expression est :

$$\sigma_z = \gamma \cdot z + p \quad (6)$$

Ce résultat, obtenu à partir des équations d'équilibre, est indépendant de la loi de comportement du sol.

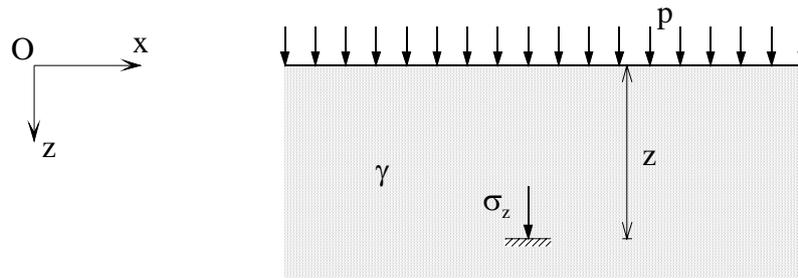


Figure 20. Contrainte due au poids du sol dans un massif à surface horizontale

Comme la charge s'étend indéfiniment suivant l'horizontale, la déformation latérale est nulle en tout point. Si la charge est appliquée sur une surface finie, ce résultat reste valable lorsque la surface chargée est de grandes dimensions par rapport à la profondeur considérée z; et on admet que la déformation latérale est nulle.

3.8.2 Calcul des contraintes

Lorsque le chargement n'est plus uniforme, le calcul de la contrainte verticale nécessite la donnée d'une loi de comportement, la loi usuelle est l'élasticité linéaire qui permet d'appliquer le principe de superposition. On se servira de la formule de Boussinesq.

3. 8. 2. 1 Le principe de superposition

Si dans un milieu, à l'état de contrainte (Σ_1) correspond l'état de déformation (E_1), et à l'état de contrainte (Σ_2) correspond l'état de déformation (E_2), alors à l'état de contrainte ($\Sigma_1 + \Sigma_2$) correspond l'état de déformation ($E_1 + E_2$) :

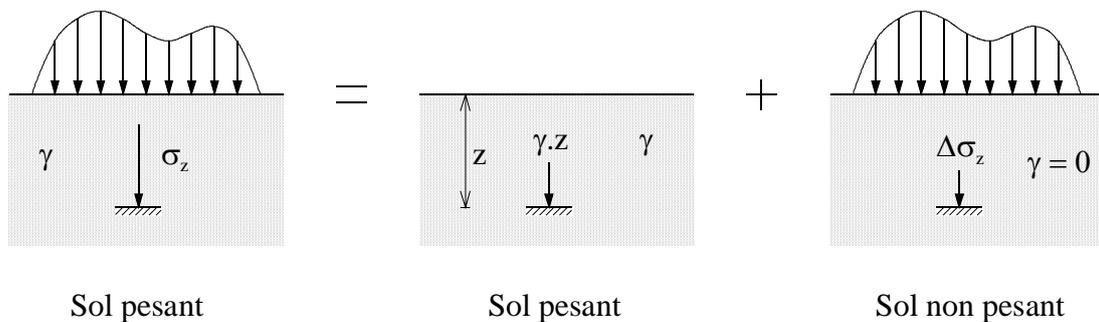


Figure 21. Le principe de superposition appliqué au cas d'un massif de sol pesant

$$\left. \begin{array}{l} (\Sigma_1) \Rightarrow (E_1) \\ (\Sigma_2) \Rightarrow (E_2) \end{array} \right\} \Rightarrow (\Sigma_1 + \Sigma_2) \Rightarrow (E_1 + E_2)$$

Pour l'exemple de la figure 21, on a :

$$\sigma_z = \gamma \cdot z + \Delta\sigma_z$$

où $\Delta\sigma_z$ est l'excès de contrainte dû aux charges appliquées à un milieu élastique non pesant.

3.8.2.2 Formule de Boussinesq

Elle permet de calculer la contrainte verticale en tout point d'un milieu semi-infini supposé homogène élastique non pesant, soumis à l'action d'une force verticale P (figure 22) :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{(r^2 + z^2)^{5/2}} \quad (7)$$

Cette formule s'écrit également :

$$\Delta\sigma_z = \frac{N.P}{z^2}$$

Avec :

$$N = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\left(1 + (r/z)^2\right)^{5/2}}$$

L'abaque n° 1 donne la variation du facteur sans dimension N en fonction du rapport $\frac{r}{z}$.

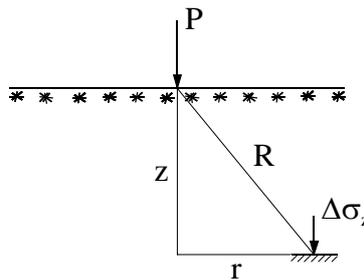


Figure 22. Contrainte verticale due à une charge ponctuelle

L'expression (7), présente l'intérêt d'être indépendante des caractéristiques du sol E et ν . Mais l'état de contrainte au point M dépend du coefficient de Poisson ν , en posant :

$$l = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

On a :

$$\Delta\sigma_z = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^3}{l^5}$$

$$\Delta\tau_{xz} = \frac{3P}{2\pi} \frac{z^2 r}{l^5}$$

$$\Delta\sigma_x = \frac{P}{2\pi} \left(\frac{3z^2r}{l^5} - \frac{1-2\nu}{l(1+z)} \right)$$

3.8.3. Contraintes dues à des distributions de charges verticales dans un massif semi-infini élastique linéaire

A partir de la formule de Boussinesq on détermine par intégration, et en appliquant le principe de superposition, l'excès de contrainte verticale $\Delta\sigma_z$ dans un massif semi-infini élastique non pesant, dû à différentes distributions de charges verticales.

3.8.3.1 Cas d'une charge rectangulaire uniforme

L'excès de contrainte $\Delta\sigma_z$ sous le coin d'une telle répartition de charge (figure 23) est donnée par l'expression :

$$\Delta\sigma_z = K.p$$

où K est un facteur sans dimension déterminé à partir de l'abaque n°2 en fonction des paramètres permutable : $m = \frac{a}{z}$ et $n = \frac{b}{z}$.

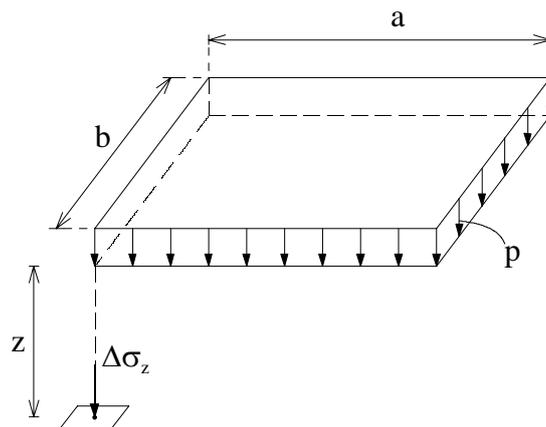


Figure 23. Contrainte due à une charge rectangulaire uniforme

La contrainte à l'aplomb d'un point quelconque A est obtenue en construisant, à partir du rectangle initial et du point considéré A, d'autres rectangles ayant chacun un sommet au point A.

La contrainte recherchée est la somme (à un signe près) des excès de contrainte produits par les rectangles considérés d'après le principe de superposition (figure 24).

Les excès de contrainte verticale pour les cas de la figure 24 sont :

- (a) $(\Delta\sigma_z)_A = p.(K_1 + K_2 + K_3 + K_4)$
- (b) $(\Delta\sigma_z)_A = p.(K_1 + K_2 - K_3 - K_4)$
- (c) $(\Delta\sigma_z)_A = p.(K_1 - K_2)$

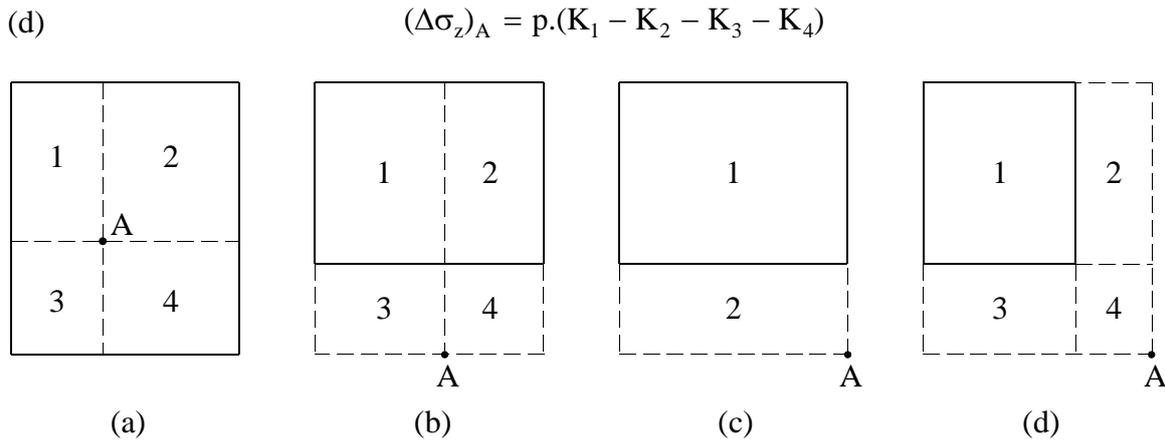


Figure 24. Cas de calcul de l'excès de contrainte verticale dû à une charge rectangulaire

3.8.3.2 Cas d'une charge circulaire uniforme

Dans l'axe de la charge circulaire de rayon r (figure 25), la contrainte verticale à la profondeur z est donnée par:

$$\Delta\sigma_z = p \left(1 - \left(\frac{z}{l} \right)^3 \right) = p.J$$

avec :

$$l = (r^2 + z^2)^{1/2}$$

L'abaque n°3 donne la variation du facteur sans dimension J en fonction du rapport $\frac{z}{l}$.

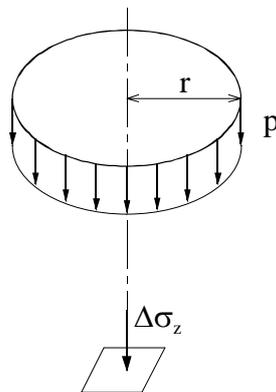


Figure 25. Contrainte due à une charge circulaire uniforme

3.8.3.3 Cas d'une charge en forme de remblai et de longueur infinie

L'excès de contrainte verticale d'une telle distribution en un point situé à la profondeur z, est donné par (figure 26) :

$$\Delta\sigma_z = p.I$$

I est un facteur sans dimension donné par l'abaque n°4 en fonction des paramètres $\frac{a}{z}$ et $\frac{b}{z}$.

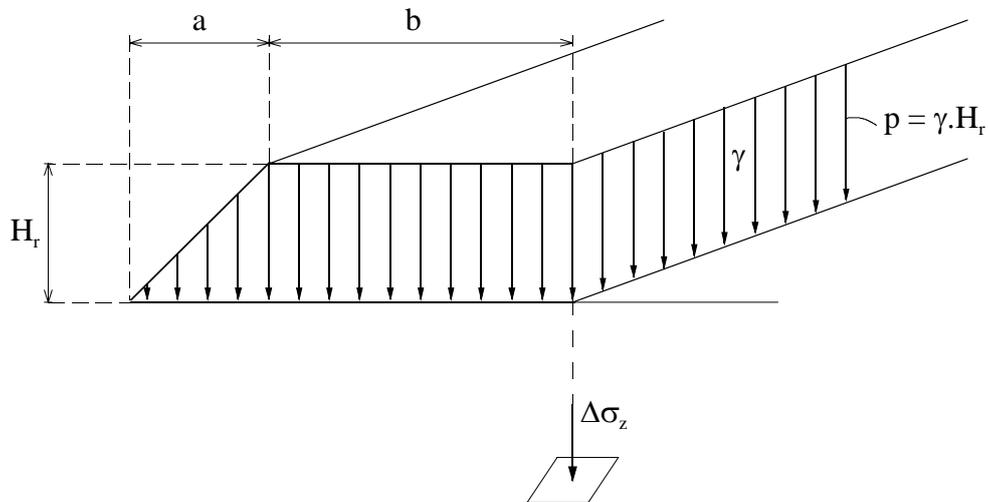


Figure 26. Excès de contrainte verticale dû à une charge en forme de remblai

3.8.3.4 Cas d'une charge uniforme ayant une forme quelconque

Lorsque la surface chargée à une forme géométrique quelconque on peut estimer rapidement l'excès de la contrainte verticale par l'abaque n°5, appelé abaque de Newmark, selon la procédure suivante:

- on dessine sur l'abaque n°5 la surface chargée à une échelle telle que : $AA' = MM'$ (figure 27); M' est la projection de M sur la surface du sol. Le dessin est fait de telle sorte que le point M' soit confondu avec le point O : centre de l'abaque n°5.
- On compte le nombre de carreaux n_c situés à l'intérieur de la surface dessinée.
- On calcule l'excès de contrainte dû à la charge p par l'expression suivante:

$$(\Delta\sigma_z)_M = 0,005 \cdot n_c \cdot p$$

Remarque: L'abaque de Newmark permet de considérer des surfaces chargées de formes compliquées qu'on ne peut pas traiter par les autres abaques.

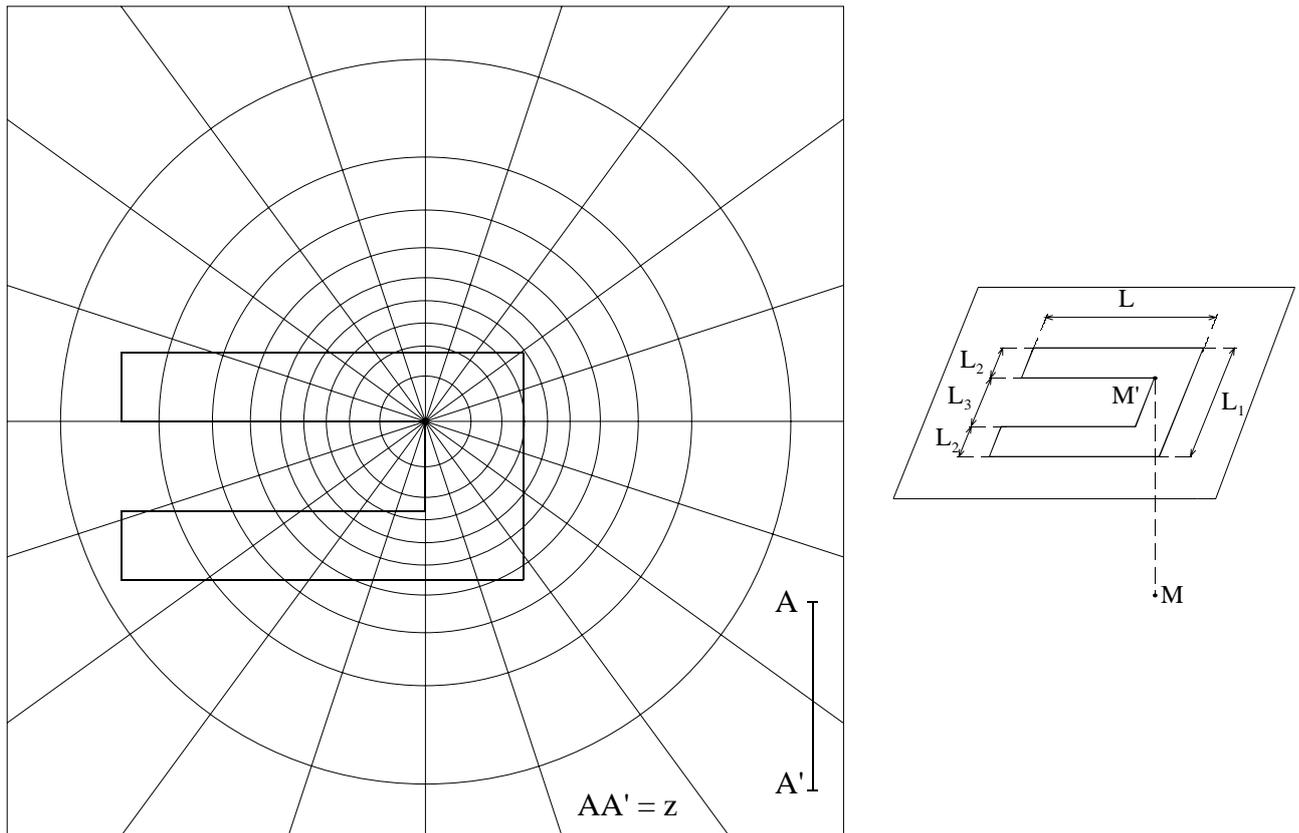


Figure 27. Calcul de l'excès de contrainte par l'abaque de Newmark

Exemple de calcul On considère un bâtiment en forme de U qui apporte à la surface du sol une contrainte $p = 200 \text{ kPa}$. Calculer l'excès de contrainte verticale au point M situé à la profondeur $z = 20 \text{ m}$, et dont la projection est en M' (figure 27).

On prend les valeurs suivantes pour les dimensions du bâtiment:

$$L = 42 \text{ m}, L_1 = 24 \text{ m}, L_2 = 7 \text{ m}, L_3 = 10 \text{ m}.$$

Avec l'abaque de Newmark, on trouve :

$$(\Delta\sigma_z)_M = 65 \text{ kPa}$$

Avec l'abaque n°2 en utilisant le principe de superposition, on trouve :

$$(\Delta\sigma_z)_M = 68,6 \text{ kPa}$$

La comparaison des deux résultats précédents montre bien que l'abaque de Newmark permet une détermination de l'excès de contrainte avec une erreur relative de l'ordre de 5%, ce qui est très correct.

3.8.4 Diffusion amplifiée des contraintes

Pour un calcul approximatif des contraintes et des tassements, on suppose qu'il y a une diffusion amplifiée de la contrainte p (figure 28), qui se transmet uniformément à la profondeur z , sur une distance déterminée à partir de la largeur a par deux droites faisant l'angle α avec la verticale. On a:

$$(\Delta\sigma_z)_M = p \cdot \frac{1}{1 + 2 \cdot \frac{z}{a} \cdot \text{tg}\alpha}$$

Pour les sols, la valeur de l'angle α est en général égale à 30° .
 Au point A on a :

$$(\Delta\sigma_z)_M = 0$$

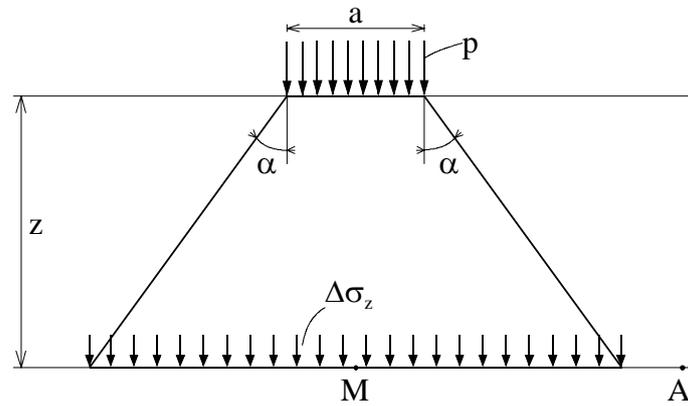


Figure 28. Diffusion amplifiée des contraintes

3.9 Notions de rhéologie des sols

3.9.1 Rappels

La rhéologie est une branche de la physique qui étudie les déformations (jusqu'à l'écoulement) des corps sous l'effet des contraintes qui leur sont appliquées, compte tenu de la vitesse d'application de ces contraintes et plus généralement de leur variation au cours du temps.

On fait recours à la rhéologie parce que la mécanique rationnelle ne suffit pas à elle seule de déterminer les contraintes ainsi que leurs évolutions au cours du temps, en tout point d'un milieu continu, Mandel (1978).

Chargement à un paramètre :

On étudie le comportement d'un matériau à partir d'essais où on applique un chargement. Ce dernier est réalisé en imposant:

- soit une force, ou une contrainte;
- soit un déplacement, ou une déformation.

Il existe deux types de chargement à savoir:

- le chargement à vitesse constante (contrôlée) : $P = \lambda.t$;
- le chargement échelon : $P = \lambda.H(t)$; où $H(t)$ est la fonction d'Heaviside: elle est nulle pour $t \leq 0$, et égale à l'unité pour $t > 0$.

On ne considère dans ce paragraphe que le cas des chargements à un seul paramètre.

3.9.2 Exemples de modèles rhéologiques

C'est un moyen de schématiser le comportement d'un matériau lorsqu'il est soumis à un chargement donné. L'exemple le plus simple est celui du patin avec frottement représenté sur la figure 29.



Figure 29. Comportement d'un patin avec frottement

Lorsque la contrainte appliquée σ reste inférieure à la contrainte seuil σ_s qui caractérise le patin, le patin ne bouge pas.

Si la contrainte appliquée est égale à σ_s , le patin se déplacera à une vitesse arbitraire.

Le modèle rhéologique représenté sur la figure 30 porte le nom de Maxwell; il schématise le comportement viscoélastique linéaire avec l'assemblage d'un ressort de raideur K et un dashpot de viscosité η . Un autre modèle, celui de Kelvin-Voigt, schématise le même comportement avec un ressort et un dashpot montés en parallèle.

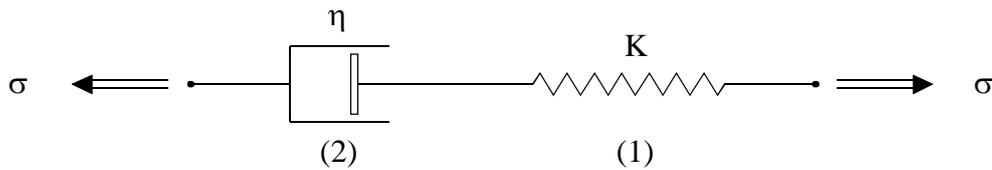


Figure 30. Le modèle de Maxwell

Equation différentielle du modèle de Maxwell

Elle est établie en écrivant que la déformation (ou la vitesse de déformation) est la somme de deux termes, soit :

$$\varepsilon = \varepsilon(1) + \varepsilon(2) \quad (8)$$

Le ressort est élastique linéaire, et en utilisant (5) l'équation (8) devient :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{K} + \frac{\dot{\varepsilon}}{\eta} \quad (9)$$

Utilité du modèle de Maxwell

Par exemple, si on impose une déformation ε à l'instant $t = 0$ qui correspond à une contrainte σ_0 , on peut déterminer l'évolution de la contrainte en fonction du temps. En effet, on écrit que pour $t = 0$ que :

$$\sigma_0 = K.\varepsilon = \eta.\dot{\varepsilon} \quad (9)$$

Comme la déformation est maintenue constante pour $t > 0$, on écrit que :

$$\dot{\varepsilon} = 0 \quad (10)$$

En utilisant (8) et (9), avec (10), on obtient l'équation:

$$\frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{K}{\eta} dt \quad (11)$$

La solution de (11) est alors :

$$\sigma = \text{cte.} \exp\left(-\left(\frac{K}{\eta}\right)t\right) \quad (12a)$$

Avec la condition initiale $\sigma = \sigma_0$ lorsque $t = 0$, on obtient :

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \exp\left(-\left(\frac{K}{\eta}\right)t\right) \quad (12)$$

L'évolution de la contrainte en fonction du temps d'après (12) est représentée sur la (figure 31), à partir de laquelle on voit que la contrainte décroît vers zéro pour un temps assez grand, et qu'au temps $t = \frac{\eta}{K}$ la contrainte vaut : $\sigma = \frac{\sigma_0}{2,73}$.

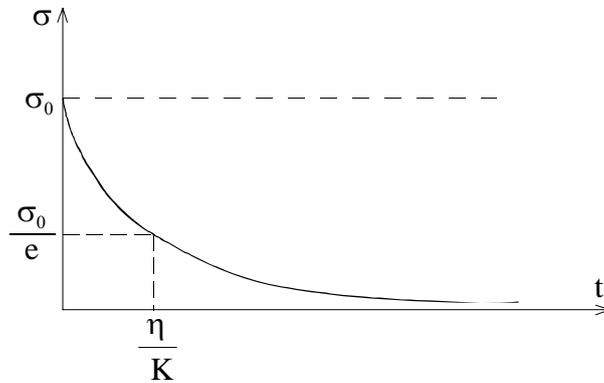


Figure 31. Evolution de la contrainte dans le temps d'après le modèle de Maxwell

Il existe plusieurs autres modèles rhéologiques plus compliqués que les précédents, ils ont été proposés pour décrire le comportement des sols en particulier. On cite parmi eux les modèle de Bingham, et de Zener (figure 32), Mandel (1978).

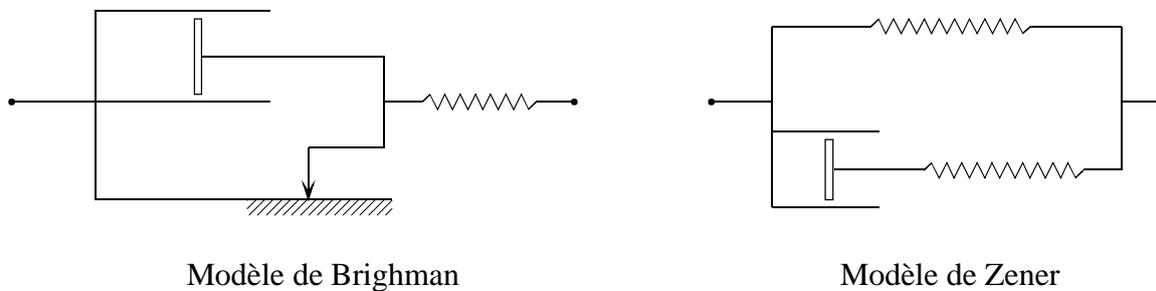


Figure 32. Exemples de modèles rhéologiques

